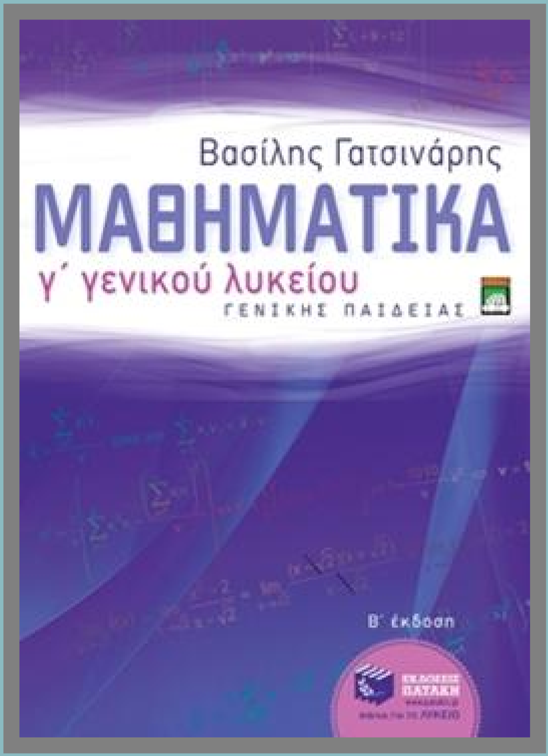
Θ Ε Ω Ρ Ι Α

Πανελλαδικών εξετάσεων



Βασίλης Γατσινάρης

Δωρεάν υποστηρικτικό υλικό

Στο βιβλίο αυτό, για πρακτικούς λόγους
χρησιμοποιούμε τα πιο κάτω σύμβολα, για τις διάφορες κατηγορίες των θεμάτων της αξιολόγησης.

Σύμβολο **Ορισμού**

Σύμβολο **Θεωρημάτων**

Σύμβολο **Συμπερασμάτων** , **Σχολίων** , **Πορισμάτων κ.λ.π.**

Σύμβολο **Για κάθε θέμα διατύπωσης θεωρίας**, **στις εξετάσεις**

Σύμβολο Συμπλήρωσης

Σύμβολο Σωστού – Λάθους

Σύμβολο Επιλογής

Σύμβολο Αντιστοίχισης

Να παρατηρήσουμε ότι τα σύνολα αριθμών στο βιβλίο αυτό, για πρακτικούς λόγους γράφονται με μία κάθετη γραμμή και όχι με δύο, όπως είναι κανονικά.
Για παράδειγμα το σύνολο **IR** , το γράφουμε σαν **R**

Καλή επιτυχία *στις εξετάσεις !*

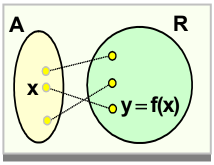
Θ ε ω ρ ί α

Πραγματική συνάρτηση

1.1 Να αναφέρετε τι ονομάζουμε συνάρτηση **f** από το **A** στο **B**

Απάντηση

Λέμε **συνάρτηση** **f** από **A** για **B** και συμβολίζουμε $\mathbf{f : A \to B}$
κάθε διαδικασία **f**
με την οποία κάθε στοιχείο **x** του **A**
αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο **y** του **B**



Στοιχεία συναρτήσεων

1.2 Θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο **A**
που λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου **R**
των πραγματικών αριθμών, ενώ το **B** συμπίπτει με το **R**

και αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής**

και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**.

- Το **f(x)** λέγεται **τιμή** της **f** στο **x**

Το γράμμα **x** που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του **A**
ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**
ενώ το **y** που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο **x** και εξαρτάται από
την τιμή του **x** , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

- Η τιμή της συνάρτησης εκφράζεται συνήθως με έναν **αλγεβρικό τύπο**
και τότε το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης είναι το “ευρύτερο” υποσύνολο του **R**
στο οποίο το **f(x)** έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

- Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα **f** , **g** , **h** κτλ.
του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

- Το γράμμα που χρησιμοποιείται σαν μεταβλητή συνάρτησης, είναι συνήθως το **x**
αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και οποιοδήποτε άλλο.

Πράξεις συναρτήσεων

1.3 Έστω δύο συναρτήσεις f, g που ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

- Το **άθροισμα** $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η **διαφορά** $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το **γινόμενο** $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$
- Το **πηλίκο** $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

1.4 Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A

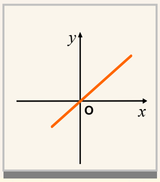
Γραφική παράσταση ή **καμπύλη** της f σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$

Επομένως ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων, ανήκει στην καμπύλη της f , μόνο όταν $y = f(x)$, η οποία και καλείται εξίσωσης της γραφικής παράστασης.

Βασικές συναρτήσεις

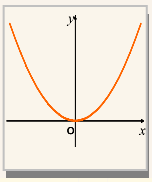
1.5 **Γραφικές παραστάσεις βασικών** συναρτήσεων.

- $f(x) = x$



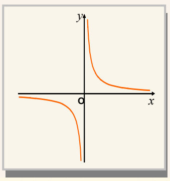
Ευθεία

- $f(x) = x^2$



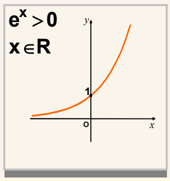
Παραβολή

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$



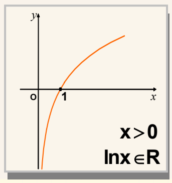
Υπερβολή

- $f(x) = e^x$



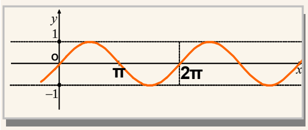
Εκθετική

- $f(x) = \ln x$



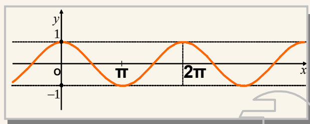
Λογαριθμική

- $f(x) = ημx$



Ημιτονοειδής

- $f(x) = συνx$

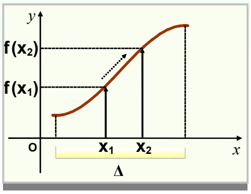


Συνημιτονοειδής

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Γνήσια αύξουσα

1.6 ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μία συνάρτηση **f** είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα **Δ** του πεδίου ορισμού της.



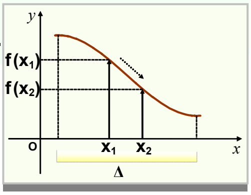
Απάντηση

Η **f** λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο **Δ**

όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$

Γνήσια φθίνουσα

1.7 ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μία συνάρτηση **f** είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα **Δ** του πεδίου ορισμού της.



Απάντηση

Η **f** λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο **Δ**

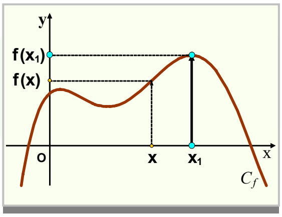
όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$

Μία συνάρτηση **γνήσια αύξουσα** ή **γνήσια φθίνουσα**, λέγεται γνήσια **μονότονη**.

Έστω **f** μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού **A**

Τοπικό μέγιστο

1.8 ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση **f** παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ **τοπικό μέγιστο**.



Απάντηση

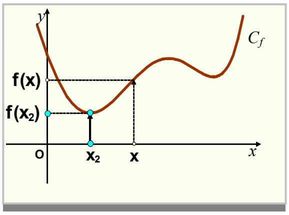
Η **f** λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ **τοπικό μέγιστο**

αν υπάρχει περιοχή του x_1 ώστε $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε σημείο **x** της περιοχής.

Αν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε $x \in A$, το **τοπικό μέγιστο** λέγεται **ολικό μέγιστο**.

Τοπικό ελάχιστο

1.9 ☞ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι η συνάρτηση **f** παρουσιάζει στο $x_2 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**.



Απάντηση

Η **f** λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_2 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**

αν υπάρχει περιοχή του x_2 ώστε $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε σημείο **x** της περιοχής.

Αν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε $x \in A$, το **τοπικό ελάχιστο** λέγεται **ολικό ελάχιστο**.

Τα **μέγιστα** και τα **ελάχιστα**, **τοπικά** ή **ολικά**, λέγονται **ακρότατα**.

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε τη **συμπεριφορά** μιας συνάρτησης **f** σε ένα σημείο x_o, στο οποίο παρουσιάζεται «**πρόβλημα**», προσεγγίζουμε το x_o και αυτή η **προσεγγιστική τιμή** γράφεται σαν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$

Ιδιότητες ορίων

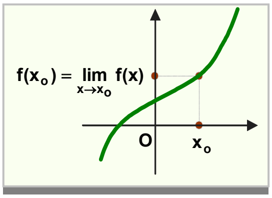
1.10 Έστω οι συναρτήσεις **f** και **g** οι οποίες στο x_o έχουν όρια **πραγματικούς** αριθμούς και έστω ότι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=\ell_2$

- $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\ell_1+\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)g(x)\right)=\ell_1\ell_2$
- $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, $\ell_2\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_o}\left(kf(x)\right)=k\ell_1$
- $\lim\limits_{x\to x_o} c=c$, $c\in R$
- $\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\right)^{\nu}=\ell_1^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$, $\ell_1\geq 0$

Συνέχεια

1.11 Να αναφέρετε πότε η συνάρτηση **f** με **πεδίο ορισμού** **Α** λέγεται **συνεχής** στο **Α**

Απάντηση



Μία συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού **Α** λέγεται **συνεχής** αν για κάθε $x_o\in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$

Γεωμετρική ερμηνεία

1.12 Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα **κλειστό διάστημα**, είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια **συνεχής καμπύλη** δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το **μολύβι** από το **χαρτί**.

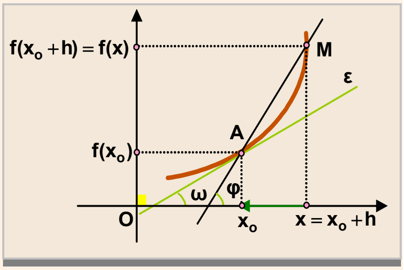
Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

1.13 Αποδεικνύεται ότι οι **γνωστές** μας συναρτήσεις, **πολυωνυμικές τριγωνομετρικές**, **εκθετικές**, **λογαριθμικές**, αλλά και όσες **προκύπτουν** από **πράξεις μεταξύ αυτών** είναι **συνεχείς** συναρτήσεις.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Η έννοια της εφαπτόμενης

1.14 Έστω $\mathbf{f}$ μία συνάρτηση
και $\mathbf{A(x_o, f(x_o))}$
ένα **σημείο** της γραφικής παράστασης $\mathbf{C_f}$
Έστω ένα σημείο $\mathbf{M(x_o + h, f(x_o + h))}$
με $\mathbf{h \neq 0}$, της γραφικής παράστασής της
και η ευθεία $\mathbf{AM}$ που ορίζουν τα σημεία $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$



Παρατηρούμε ότι καθώς το $\mathbf{h}$ τείνει στο $\mathbf{0}$, η τέμνουσα $\mathbf{AM}$
φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση $\boldsymbol{\varepsilon}$
την οποία ονομάζουμε **εφαπτομένη** της $\mathbf{C_f}$ στο $\mathbf{A}$

Επειδή η **κλίση** της τέμνουσας $\mathbf{AM}$ είναι ίση με $\dfrac{\mathbf{f(x_o + h) - f(x_o)}}{\mathbf{h}} = \mathbf{εφφ}$

είναι λογικό να αναμένουμε ότι η **εφαπτομένη** της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο $\mathbf{A(x_o, f(x_o))}$

θα έχει **κλίση** την τιμή του ορίου $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{f(x_o + h) - f(x_o)}}{\mathbf{h}}$, όταν αυτό **υπάρχει**

και παριστάνει την **εφω**

Παράγωγος σε σημείο

1.15 Να αναφέρετε πότε λέμε
ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της.

Απάντηση

Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ λέμε ότι
είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο $\mathbf{x_o}$ του πεδίου ορισμού της
αν **υπάρχει** το **όριο** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{f(x_o + h) - f(x_o)}}{\mathbf{h}}$ και είναι **πραγματικός αριθμός**.

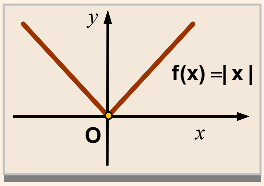
Το όριο αυτό λέγεται **παράγωγος** της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x_o}$, **συμβολίζεται** με $\mathbf{f'(x_o)}$
και διαβάζεται $\mathbf{f}$ **τονούμενο** του $\mathbf{x_o}$

Ρυθμός μεταβολής

1.16 Ο παράγωγος $f'(x_o)$ εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** της $f(x) = y$ ως προς x στο x_o

Μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις

1.17 **Υπάρχουν** και συναρτήσεις



οι οποίες **δεν** έχουν **παράγωγο** σε ένα σημείο.

Όπως είναι για παράδειγμα

η συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο σημείο $x_o = 0$

Γιατί όταν $h < 0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h} = -1$

ενώ όταν $h > 0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1$

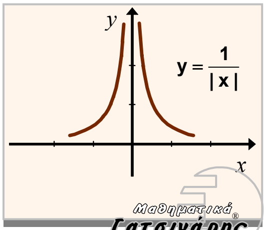
που σημαίνει ότι **δεν υπάρχει** το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

Μη ύπαρξη ορίου

1.18 Να αναφέρουμε ότι ένα **όριο** μπορεί να **μην** είναι **πραγματικό**.

Για παράδειγμα

θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$ ορισμένη στο R^*



Όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 0

θα είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|} = +\infty$

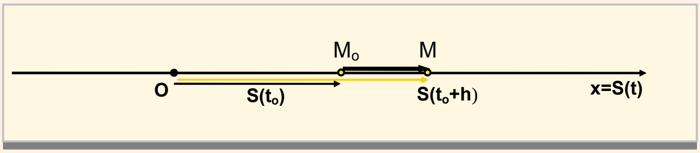
και τότε θα λέμε ότι το όριο **απειρίζεται**.

Στιγμιαία ταχύτητα

1.19 Ας θεωρήσουμε ένα σώμα $\mathbf{\Sigma}$ που **κινείται** κατά μήκος ενός άξονα

και έστω ότι $\mathbf{S}=\mathbf{S(t)}$ η ***συνάρτηση θέσης*** του κινητού

που καθορίζει την τετμημένη του σώματος τη χρονική στιγμή $\mathbf{t}$



Υποθέτουμε ότι κάποια στιγμή $\mathbf{t_o}$ το $\mathbf{\Sigma}$ βρίσκεται στη θέση $\mathbf{M_o}$

και ότι μετά από παρέλευση χρόνου $\mathbf{h \neq 0}$, δηλαδή τη στιγμή $\mathbf{t = t_o + h}$

βρίσκεται στο θέση $\mathbf{M}$

Στο διάστημα από $\mathbf{t_o}$ έως $\mathbf{t_o + h}$ ...πλάτους $\mathbf{h}$

η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $\mathbf{S(t_o + h) - S(t_o)}$

- **Μέση ταχύτητα** του $\mathbf{\Sigma}$

σ' αυτό το χρονικό διάστημα ονομάζουμε την $\bar{\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{S(t_o + h) - S(t_o)}}{\mathbf{h}} = \dfrac{\textbf{Μετατόπιση}}{\textbf{Χρόνος}}$

- **Στιγμιαία ταχύτητα** $\mathbf{u(t_o)}$ ή απλά **ταχύτητα**, τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_o}$

ονομάζουμε το όριο του λόγου της μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν χωρίς στην πραγματικότητα να γίνεται ίση με το μηδέν.

Δηλαδή, ονομάζουμε το όριο της **μέσης ταχύτητας** καθώς το $\mathbf{h}$ τείνει στο $\mathbf{0}$

Δηλαδή $\mathbf{u(t_o)} = \lim\limits_{\mathbf{h \to 0}} \dfrac{\mathbf{S(t_o + h) - S(t_o)}}{\mathbf{h}} = \mathbf{S'(t_o)}$

- Αν το $\mathbf{\Sigma}$ **δεν κινείται**, τότε $\mathbf{u(t)} = \lim\limits_{\mathbf{h \to 0}} \dfrac{\mathbf{S(t+h) - S(t)}}{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$

- Αν το $\mathbf{\Sigma}$ **κινείται** προς τα **δεξιά** (+), τότε $\mathbf{u(t)} = \lim\limits_{\mathbf{h \to 0}} \dfrac{\mathbf{S(t+h) - S(t)}}{\mathbf{h}} > \mathbf{0}$

- Αν το $\mathbf{\Sigma}$ κινείται προς τα **αριστερά** (-), τότε $\mathbf{u(t)} = \lim\limits_{\mathbf{h \to 0}} \dfrac{\mathbf{S(t+h) - S(t)}}{\mathbf{h}} < \mathbf{0}$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Παράγωγος συνάρτηση

1.20 Να αναφέρετε πως ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $\mathbf{f'}$ της $\mathbf{f}$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbf{A}$

Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$

στο οποίο η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη και με τύπο $\mathbf{y = f'(x)}$

λέγεται **πρώτη παράγωγος** της $\mathbf{f}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{f'}$

ώστε το κάθε $\mathbf{x \in B}$ να αντιστοιχίζεται στο $\mathbf{y = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

Παράγωγος ανώτερης τάξης

1.21 Η παράγωγος της $\mathbf{f'}$, λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της $\mathbf{f}$

και συμβολίζεται με $\mathbf{f''}$

Τελικά ανάλογα ορίζεται η **τρίτη παράγωγος**, η **τετάρτη παράγωγος** κ.λ.π.

Να τονίσουμε ότι είναι $\mathbf{s'(t) = u(t)}$ και $\mathbf{u'(t) = s''(t) = \alpha(t)}$ $\ldots$ $\mathbf{\alpha}$: Επιτάχυνση.

Στη συνέχεια
θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

Παράγωγος σταθερής συνάρτησης

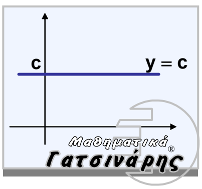
1.22 Η παράγωγος της $\mathbf{f(x) = c}$ με $\mathbf{c \in R}$, είναι η $\mathbf{f'(x) = (c)' = 0}$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = c}$

Είναι $\mathbf{f(x+h) - f(x) = c - c = 0}$

Για $\mathbf{h \neq 0}$ είναι $\mathbf{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0}$



Οπότε $\mathbf{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0}$

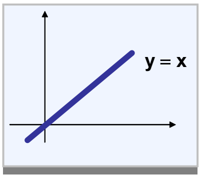
Άρα $\mathbf{(c)' = 0}$

Παράγωγος ταυτοτικής

1.23 Η παράγωγος της $f(x)=x$, είναι η $f'(x)=(x)'=1$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$



Είναι $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$

Για $h\neq 0$, είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

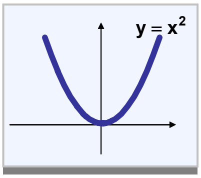
Άρα $(x)'=1$

Παράγωγος βασικής παραβολής

1.24 Η παράγωγος της $f(x)=x^2$, είναι η $f'(x)=(x^2)'=2x$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$



$$\begin{aligned}\text{Είναι } f(x+h)-f(x) &= (x+h)^2-x^2\\ &= x^2+2xh+h^2-x^2\\ &= 2xh+h^2\\ &= h(2x+h)\end{aligned}$$

Για $h\neq 0$ είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(2x+h)h}{h}=2x+h$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

Άρα $(x^2)'=2x$

1.25 Γενικότερα είναι

- $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$, όπου ν : Φυσικός. , $x\in R$
- $(x^\rho)'=\rho x^{\rho-1}$, όπου ρ : Ρητός αριθμός , $x\in R_+^*$

Για παράδειγμα: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x>0$

Βασικές παραγωγίσεις

1.26 • $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x\ ,\ x \in R$ • $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x\ ,\ x \in R$

• $(e^x)' = e^x\ ,\ x \in R$ • $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ ,\ x > 0$

Στη συνέχεια, θα δούμε κανόνες παραγώγισης στις πράξεις συναρτήσεων.

Παράγωγος γινομένου συνάρτησης με αριθμό

1.27 $(cf(x))' = cf'(x)\ ,\ c \in R$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$

Είναι $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c\left(f(x+h) - f(x)\right)$

Για $h \neq 0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h} = c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = cf'(x)$

Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

Παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων

1.28 $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$

Είναι $F(x+h) - F(x) = f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)$
$= f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)$

Για $h \neq 0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Παραγωγίσεις άλλων πράξεων

1.29 • $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

• $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

• $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Για παράδειγμα: $(\text{εφ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Κριτήριο μονοτονίας

1.30 ■ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

η f θα είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ

■ Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

η f θα είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ

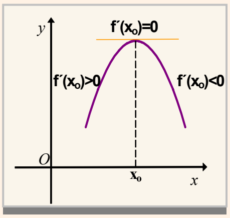
Κριτήριο ακρότατων

1.31 ■ Αν για μια συνάρτηση f

ισχύουν $f'(x_o) = 0$ για $x_o \in (\alpha,\beta)$

$f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β)

η f θα παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x = x_o$ **μέγιστο**.

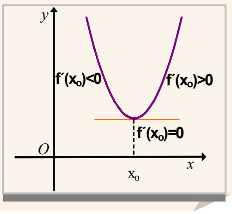


■ Αν για μια συνάρτηση f

ισχύουν $f'(x_o) = 0$ για $x_o \in (\alpha,\beta)$

$f'(x) < 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) > 0$ στο (x_o, β)

η f θα παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x = x_o$ **ελάχιστο**.



Γενικότερα, αν η f **μηδενίζεται** μόνο σε ένα σημείο ενός ανοικτού διαστήματος και γίνεται **αλλαγή μονοτονίας** εκατέρωθεν αυτού, τότε αυτό είναι και το **μοναδικό ολικό ακρότατο**.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Εισαγωγή

Τι είναι η στατιστική

2.1 **Στατιστική** είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών

για • το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων (Σχεδιασμός πειραμάτων)

• τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους (Περιγραφική στατιστική)

• την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων. (Επαγωγική στατιστική)

Οι έρευνες σε ανθρώπινους πληθυσμούς, ονομάζονται **δημοσκοπήσεις**.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πληθυσμός - Μεταβλητές

2.2 • **Πληθυσμός** είναι ένα σύνολο του οποίου εξετάζουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά του.

• Τα **στοιχεία** του πληθυσμού λέγονται και **μονάδες** ή **άτομα** του πληθυσμού.

• Το **χαρακτηριστικό** ως προς το οποίο εξετάζουμε έναν πληθυσμό
το οποίο είναι καλά ορισμένο, λέγεται **μεταβλητή**.
Συνήθως το συμβολίζουμε με το κεφαλαίο γράμμα **X**

• Από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού
ως προς ένα χαρακτηριστικό τους, προκύπτει μια σειρά από δεδομένα
τα οποία μπορεί να είναι και ταυτόσημα
που λέγονται **στατιστικά δεδομένα** ή **παρατηρήσεις**.

• Οι **δυνατές τιμές** που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή, λέγονται **τιμές** της **μεταβλητής**.

Είδη μεταβλητών

2.3 Τις μεταβλητές τις **διακρίνουμε**:

• Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** και είναι οι μεταβλητές που οι **τιμές** τους **δεν** είναι **αριθμοί**.

• Σε **ποσοτικές** και είναι οι μεταβλητές που οι **τιμές** τους είναι **αριθμοί**
και μάλιστα αυτές διακρίνονται:
- Σε **διακριτές** μεταβλητές που παίρνουν μόνο “**μεμονωμένες**” τιμές
- Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν **οποιαδήποτε τιμή** ενός **διαστήματος** πραγματικών αριθμών **(α, β)**

Συλλογή Στατιστικών Δεδομένων

Απογραφή

2.4 Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό, είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει.
Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή**.

Αντιπροσωπευτικό δείγμα

2.5 Ονομάζουμε **δείγμα** ενός πληθυσμού μια μικρή ομάδα του.
Ένα δείγμα θεωρείται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού αν έχει **επιλεγεί** κατά τέτοιο τρόπο ώστε **κάθε άτομο** του πληθυσμού να έχει την **ίδια δυνατότητα** να **επιλεγεί**.

Δειγματοληψία

2.6 Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς, είναι το αντικείμενο της **δειγματοληψίας** που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Στατιστικοί πίνακες

2.7 Η παρουσίαση των δεδομένων σε πίνακες, γίνεται με την κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες, με τρόπο που να διευκολύνεται η σύγκριση των στοιχείων και η καλύτερη ενημέρωση του αναγνώστη, σχετικά με τη δομή του πληθυσμού που ερευνάμε.
Οι πίνακες διακρίνονται στους:
- **Γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών, για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων.
- **Ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς.
Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:
✓ Τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει το περιεχόμενο.
✓ Τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών, που δείχνουν τις μονάδες μέτρησης.
✓ Το **κύριο σώμα** (κορμό), που περιέχει τα στατιστικά δεδομένα.
✓ Την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος και δείχνει την προέλευση των στοιχείων.

Πίνακες κατανομής συχνοτήτων

Απόλυτη συχνότητα

2.8 ☞ Να αναφέρετε τι λέμε **απόλυτη συχνότητα** v_i της τιμής x_i

Απάντηση

Έστω οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v, $\kappa \le v$

Ο φυσικός v_i που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων, ονομάζεται **(απόλυτη) συχνότητα** v_i της x_i

- Είναι $v_1 + v_2 + ... + v_\kappa = v$

Σχετική συχνότητα

2.9 ☞ Να αναφέρετε τι λέμε **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής x_i

Απάντηση

Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, λέγεται το πηλίκο $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i = 1,2,...,\kappa$

Εκατοστιαία σχετική συχνότητα

2.10 ☞ Να αναφέρετε τι λέμε **εκατοστιαία σχετική συχνότητα** $f_i\%$ της τιμής x_i

Απάντηση

Εκατοστιαία σχετική συχνότητα $f_i\%$, λέγεται το $f_i\% = 100 \cdot f_i$, $i = 1,2,...,\kappa$

Βασικές ιδιότητες

2.11 🕮 Έστω οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας μεταβλητής X, ενός δείγματος μεγέθους v, με $\kappa \le v$

Είναι ■ $0 \le f_i \le 1$

■■ $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$ ...όπου $i = 1,2,...,\kappa$

Απόδειξη

■ Επειδή $0 \le v_i \le v$ είναι $\frac{0}{v} \le \frac{v_i}{v} \le \frac{v}{v} \Leftrightarrow 0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,...,\kappa$

■■ Είναι $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + ... + \frac{v_\kappa}{v} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_\kappa}{v} = \frac{v}{v} = 1$

Είναι φανερό ότι $f_1\% + f_2\% + ... + f_\kappa\% = 100\%$

Πίνακες συχνοτήτων

2.12 Το σύνολο των **ζευγών** (x_i, v_i) δίνει την **κατανομή συχνοτήτων**

το σύνολο των (x_i, f_i) δίνει την **κατανομή σχετικών συχνοτήτων**.

…Όμοια ορίζουμε και την **κατανομή εκατοστιαίων σχετικών συχνοτήτων**.

Τα πιο πάνω, αν κωδικοποιηθούν σε πίνακες, δίνουν τους αντίστοιχους τους **πίνακες κατανομής συχνοτήτων** ή απλά τους **πίνακες συχνοτήτων**.

Αθροιστικές συχνότητες

2.13 Να αναφέρετε τι λέμε **αθροιστική συχνότητα** N_i της τιμής x_i

Απάντηση

Έστω οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας **ποσοτικής** μεταβλητής X που είναι σε **αύξουσα διάταξη**.

Λέμε **αθροιστική συχνότητα** της x_i, τον αριθμό $N_i = v_1 + v_2 + ... + v_i$, $i = 1,2,...,\kappa$

Η N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι **μικρότερες ή ίσες** της x_i

Είναι φανερό ότι: $v_1 = N_1$, $v_2 = N_2 - N_1$, … , $v_\kappa = N_\kappa - N_{\kappa-1}$

Σχετικές αθροιστικές συχνότητες

2.14 Να αναφέρετε τι λέμε **σχετική αθροιστική συχνότητα** F_i της x_i

Απάντηση

Έστω οι τιμές $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ μιας **ποσοτικής** μεταβλητής X που είναι σε **αύξουσα διάταξη**.

Λέμε **αθροιστική σχετική** συχνότητα της x_i, το $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$, με $i = 1,2,...,\kappa$

Η F_i εκφράζει το **ποσοστό** των παρατηρήσεων που είναι **μικρότερες ή ίσες** της x_i

Είναι φανερό ότι $f_1 = F_1$, $f_2 = F_2 - F_1$, … , $f_\kappa = F_\kappa - F_{\kappa-1}$

Συχνά οι F_i **πολλαπλασιάζονται** επί 100, εκφραζόμενες έτσι επί **τοις εκατό**

δηλαδή $F_i\% = 100F_i$

Γραφική παράσταση κατανομής συχνοτήτων.

Γραφικές παραστάσεις

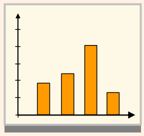
2.15 Τα στατιστικά δεδομένα παρουσιάζονται πολλές φορές και υπό μορφή γραφικών παραστάσεων ή διαγραμμάτων.
Οι γραφικές παραστάσεις παρέχουν πιο σαφή εικόνα του χαρακτηριστικού σε σχέση με τους πίνακες, είναι πολύ πιο ενδιαφέρουσες και ελκυστικές χωρίς βέβαια να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία από εκείνη που περιέχεται στους αντίστοιχους πίνακες συχνοτήτων.
Επί πλέον με τα διαγράμματα διευκολύνεται η σύγκριση μεταξύ ομοειδών στοιχείων για το ίδιο ή για διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Υπάρχουν **διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης**, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε.

Όπως οι πίνακες, έτσι και τα στατιστικά διαγράμματα πρέπει να συνοδεύονται
Από
- ✓Τον **τίτλο**.
- ✓Την **κλίμακα** με τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται.
- ✓Το **υπόμνημα** που επεξηγεί συνήθως τις τιμές της μεταβλητής.
- ✓Την **πηγή** των δεδομένων.

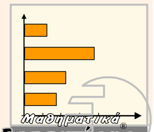
Ραβδόγραμμα

2.16 Το **Ραβδόγραμμα**



χρησιμοποιείται
για την παράσταση των τιμών μιας **ποιοτικής μεταβλητής**.

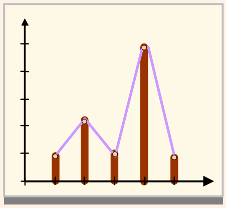
Το **ραβδόγραμμα** αποτελείται από **ορθογώνιες στήλες**
που οι **βάσεις** τους βρίσκονται **συνήθως** πάνω στον **x′x**
Σε **κάθε τιμή** αντιστοιχεί μια **ορθογώνια στήλη**, της οποίας το **ύψος** είναι ίσο με την αντίστοιχη **συχνότητα** για το ραβδόγραμμα συχνοτήτων ή με την **σχετική συχνότητα** για το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
Η **απόσταση** μεταξύ των στηλών και το **μήκος** των **βάσεών** τους καθορίζονται αυθαίρετα.



Ο **βάσεις** τους μπορεί να βρίσκονται και στον άξονα **y′y**

Διάγραμμα συχνοτήτων

2.17 Στην περίπτωση των **ποσοτικών μεταβλητών** κάνουμε το **διάγραμμα συχνοτήτων**.



Αυτό μοιάζει με το ραβδόγραμμα, αλλά αντί να χρησιμοποιούμε ορθογώνια, υψώνουμε σε κάθε x_i μία **κάθετη** γραμμή με μήκος **ίσο** προς την **αντίστοιχη συχνότητα**.

Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2 < \dots < x_\kappa$

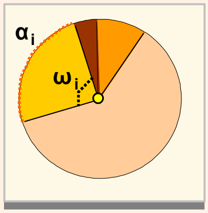
Ενώνοντας τα σημεία (x_i, ν_i), παίρνουμε το **πολύγωνο συχνοτήτων**.

Αυτό μας δίνει μία γενική ιδέα για τη μεταβολή της συχνότητας.

Ανάλογα παίρνουμε και το **διάγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**.

Κυκλικό Διάγραμμα

2.18 Το **κυκλικό διάγραμμα**



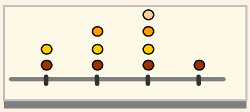
χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των **ποιοτικών** όσο και των **ποσοτικών** μεταβλητών όταν οι **τιμές** $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι **σχετικά λίγες**.

Το **κυκλικό διάγραμμα** είναι ένας **κυκλικός δίσκος** χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, ώστε τα **εμβαδά** ή τα **τόξα** αυτών να είναι **ανάλογα** προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις **σχετικές** συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής …με $i = 1, 2, \dots, \kappa$

Αν α_i είναι το αντίστοιχο **τόξο** ενός **κυκλικού τομέα**, είναι $\alpha_i = \nu_i \dfrac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ f_i$

Σημειόγραμμα

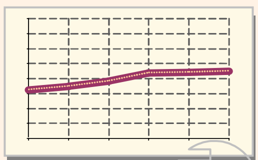
2.19 Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα**



όπου οι τιμές παριστάνονται γραφικά σαν σημεία υπεράνω ενός οριζόντιου άξονα.

Χρονόγραμμα

2.20 Το **χρονόγραμμα** ή **χρονολογικό διάγραμμα** χρησιμοποιείται για την απεικόνιση μιας **διαχρονικής εξέλιξης**.



Συνήθως ο $x'x$ χρησιμοποιείται σαν άξονας **μέτρησης** του **χρόνου** και ο $y'y$ σαν άξονας **μέτρησης** της **μεταβλητής**.

Ομαδοποίηση παρατηρήσεων

2.21 ✍ Οι πίνακες συχνοτήτων είναι δύσκολο να κατασκευαστούν όταν το **πλήθος** των τιμών μιας μεταβλητής είναι **πολύ μεγάλο**.
Σ' αυτές τις περιπτώσεις **ομαδοποιούμε** τις παρατηρήσεις σε **μικρό πλήθος ομάδων** που ονομάζονται και **κλάσεις** και κάθε τιμή ανήκει σε μία μόνο κλάση.
Εμείς θα ασχοληθούμε με κλάσεις που έχουν το ίδιο πλάτος.

Τα **άκρα** των κλάσεων καλούνται και **όρια** των κλάσεων.
Η κάθε κλάση περιέχει το κάτω άκρο της αλλά όχι το πάνω άκρο.
Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης $[\alpha,\beta)$ …επειδή όπως λέμε θεωρούνται **όμοιες αντιπροσωπεύονται** από το **κέντρο** $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ αυτής της κλάσης.

Για την **ομαδοποίηση** των δεδομένων, στην αρχή επιλέγουμε τον αριθμό κ των **ομάδων** ή **κλάσεων**.
Το κ συνήθως ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του.
Γενικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως οδηγός ο παρακάτω πίνακας.

Μέγεθος δείγματος ν	κ	Μέγεθος δείγματος ν	κ
<20	5	$200-400$	9
$20-50$	6	$400-700$	10
$50-100$	7	$700-1000$	11
$100-200$	8	≥ 1000	12

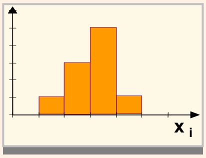
Μετά προσδιορίζουμε το **πλάτος** των κλάσεων.
✓**Πλάτος** c μιας κλάσης, ονομάζεται η **διαφορά** του **κατωτέρου** από το **ανώτερο όριο** της κλάσης.
✓Ορίζουμε τώρα σαν **εύρος** R του δείγματος, τη **διαφορά** της **μικρότερης** παρατήρησης από τη **μεγαλύτερη** παρατήρηση του συνολικού δείγματος.
✓Για να **κατασκευάσουμε** ισοπλατείς κλάσεις με **πλάτος** c
διαιρούμε το **εύρος** R δια του **αριθμού** των **κλάσεων** κ
στρογγυλεύοντας αν χρειαστεί για λόγους διευκόλυνσης, πάντα προς τα πάνω **όχι στρογγυλοποιώντας.**
Ξεκινάμε από την μικρότερη παρατήρηση ή λίγο πιο κάτω και προσθέτοντας κάθε φορά το c, δημιουργούμε τις κ κλάσεις, ώστε να περιλαμβάνουν όλες τις τιμές.
Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i, καλείται **συχνότητα** της **κλάσης** αυτής ή **συχνότητα** της **κεντρικής τιμής** x_i με $i=1,2,\dots,\kappa$

Έτσι αντί να μιλάμε για συχνότητες κλάσεων, θα μιλάμε και για συχνότητες κεντρικών τιμών και έτσι αναγόμαστε στα γνωστά των διακριτών μεταβλητών.

Παρουσίαση στατιστικών ομαδοποιημένων δεδομένων.

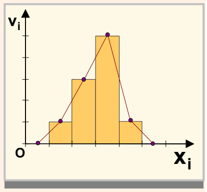
Ιστόγραμμα συχνοτήτων

2.22 Η **παράσταση** ενός πίνακα
με **ομαδοποιημένα δεδομένα**
γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα συχνοτήτων**.
Οριζόντια σημειώνουμε τις κλάσεις με κατάλληλη κλίμακα.



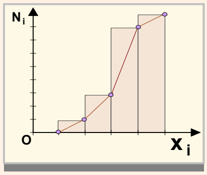
Κατασκευάζουμε διαδοχικά ορθογώνια, λεγόμενα **ιστοί**, με βάσεις ίσου πλάτους.
Η **βάση** κάθε **ιστού** θα θεωρούμε ότι ισούται με **1** (...δηλαδή με ένα **c**)
Το **ύψος** θα είναι ίσο με τη **συχνότητα** της κάθε κλάσης.
Έτσι το **εμβαδόν** κάθε **ιστού** θα έχει **εμβαδόν** ίσο με τη **συχνότητα** της **κλάσης**.
Το **άθροισμα** των **εμβαδών** όλων των **ορθογωνίων** μας δίνει το **μέγεθος ν**

■ Αν στο **ιστόγραμμα συχνοτήτων**
θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις στην αρχή
και στο τέλος με συχνότητα **0** και ενώσουμε τα μέσα
των πάνω βάσεων, σχηματίζεται το **πολύγωνο συχνοτήτων**.



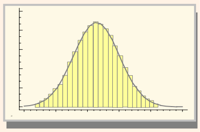
Το **εμβαδόν** του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο **συχνοτήτων** και τον **x′x**
ισούται με **ν** και αντίστοιχα με **1** στο πολύγωνο **σχετικών**.

■ Ανάλογα κατασκευάζουμε
και το **ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων**.
Αν ενώσουμε τα **δεξιά άκρα**, **όχι** τα **μέσα** των **πάνω βάσεων**
με ευθύγραμμα τμήματα, βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**.

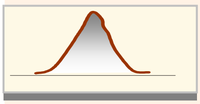


Καμπύλες συχνοτήτων

2.23 Αν ο **αριθμός** των **κλάσεων** για μια **συνεχή μεταβλητή**
είναι **αρκετά μεγάλος** …τείνει στο άπειρο
οπότε το **πλάτος** των κλάσεων είναι **αρκετά μικρό** …τείνει στο **0**
τότε η **πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων**, τείνει να πάρει τη μορφή μιας **ομαλής καμπύλης** που ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων** ...Όπως δείχνει το σχήμα.

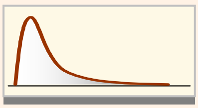


Χαρακτηριστικές καμπύλες

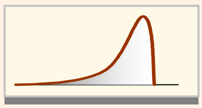


Κανονική.

Ομοιόμορφη.



Ασύμμετρη με **θετική** **ασυμμετρία.**



Ασύμμετρη με **αρνητική** **ασυμμετρία.**

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Μέτρα θέσης

2.24 Τα μέτρα θέσης μίας κατανομής, είναι κάποια αριθμητικά μεγέθη που δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.
Δηλαδή εκφράζουν την “κατά μέσο όρο” απόστασή τους από την αρχή των αξόνων
Τα πιο **συνηθισμένα μέτρα** που χρησιμοποιούνται μόνο για ποσοτικές μεταβλητές είναι ο **αριθμητικός μέσος** ή **μέση τιμή** και η **διάμεσος**.

Μέση τιμή ή αριθμητικός μέσος

2.25 Να αναφέρετε τι λέμε **μέση τιμή** ή **αριθμητικό μέσο** $\bar{x}$ των παρατηρήσεων ενός δείγματος.

Απάντηση

Έστω η μεταβλητή X και το δείγμα μεγέθους ν με **παρατηρήσεις** τις $t_1, t_2, ..., t_\nu$

Ορίζουμε σαν **μέση τιμή** $\bar{x}$ αυτών, τον αριθμό $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i$

2.26 Αν οι **τιμές** της μεταβλητής X είναι οι $x_1, x_2, ..., x_\kappa$, με $i = 1,2,...,\kappa$
με απόλυτες συχνότητες τις $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ και σχετικές συχνότητες τις $f_1, f_2, ..., f_\kappa$

Τότε είναι και $\bar{x} = \dfrac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i\nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa} \dfrac{x_i\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

2.27 Αν στις τιμές $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δίνεται διαφορετική **βαρύτητα** ή **έμφαση** χρησιμοποιούμε τον **σταθμισμένο αριθμητικό μέσο** ή **σταθμικό μέσο**.
Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους **συντελεστές βαρύτητας** ή **στάθμισης** $w_1, w_2, ..., w_\nu$

τότε ο **σταθμικός μέσος** βρίσκεται από $\bar{x} = \dfrac{x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$

Μέση τιμή σε ομαδοποιημένα δεδομένα

2.28 Εδώ θα θεωρούμε σαν **τιμές**, τις **κεντρικές τιμές** των κλάσεων.

Διάμεσος

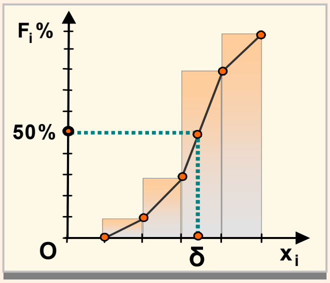
2.29 Να αναφέρετε τι λέμε **διάμεσο δ** κάποιων **ν** παρατηρήσεων.

Απάντηση

Διάμεσο δ ενός δείγματος **ν** παρατηρήσεων
οι οποίες έχουν διαταχθεί σε **αύξουσα σειρά**
ορίζουμε τη **μεσαία παρατήρηση**, όταν το **ν περιττός**
ή το **ημιάθροισμα** των **2** μεσαίων παρατηρήσεων, όταν **ν άρτιος**.

Διάμεσος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

2.30 Από το σημείο εκείνο του ημιάξονα **Oy**
των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
που είναι το **50%** των **παρατηρήσεων**
φέρουμε την **κάθετη** σ' αυτόν
μέχρι να **τμήσουμε** το πολύγωνο
αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και
και από εκεί την **κάθετη** στον ημιάξονα **Ox**
και βρίσκουμε τον αριθμό **δ** που αποτελεί τη **διάμεσο**.



Η **διάμεσος** έχει **αθροιστική σχετική συχνότητα** $F_i\% = 50\%$

Σημασία των μέτρων θέσης

2.31 Η μέση τιμή, στην ουσία είναι ο γνωστός μας **μέσος όρος**.
Από μόνος του δεν δίνει και σημαντικές πληροφορίες, αφού δύο δείγματα
με τον ίδιο μέσο όρο, μπορεί να συμπεριφέρονται διαφορετικά.
Η διάμεσος, είναι ένα ακόμα μέτρο θέσης, το οποίο στην ουσία μας δείχνει μία «μέση τιμή» του «κέντρου των παρατηρήσεων» και είναι ανεξάρτητη από τα άκρα.

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε **δύο ίσα μέρη** όταν οι παρατηρήσεις τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά.
Ακριβέστερα
η **διάμεσος** είναι η τιμή για την οποία το **πολύ 50%** των **παρατηρήσεων**
είναι **μικρότερες** από αυτήν και το **πολύ 50%** των **παρατηρήσεων**
είναι **μεγαλύτερες** από την τιμή αυτήν.

Μέτρα διασποράς

2.32 Τα μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας

είναι αριθμητικά μεγέθη που εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

Σπουδαιότερα είναι: το **Εύρος** ή **Κύμανση**, η **Διακύμανση** και η **Τυπική απόκλιση**.

Εύρος ή κύμανση

2.33 Να αναφέρετε τι λέμε **εύρος** ή **κύμανση** **R** των παρατηρήσεων.

Απάντηση

Ορίζεται σαν η **διαφορά** της **ελάχιστης** από τη **μεγαλύτερη** παρατήρηση.

Το εύρος είναι ένα αρκετά απλό μέτρο που υπολογίζεται εύκολα, δε θεωρείται όμως αξιόπιστο μέτρο διασποράς γιατί βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.

Εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα

2.34 Όταν έχουμε **ομαδοποιημένα δεδομένα**

το **εύρος** δίνεται από τη **διαφορά** του **κατώτερου ορίου** της **πρώτης κλάσης** από το **ανώτερο όριο** της **τελευταίας κλάσης**.

Διακύμανση

2.35 Να αναφέρετε τι λέμε **διακύμανση** ή **διασπορά** $\mathbf{s^2}$ των παρατηρήσεων.

Απάντηση

Λέμε **διακύμανση ή διασπορά** των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$

$$s^2 = \frac{(t_1-\bar{x})^2 + (t_2-\bar{x})^2 + \ldots + (t_\nu-\bar{x})^2}{\nu}$$ ή απλούστερα το $$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2$$

Η διακύμανση είναι η μέση τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη $\bar{x}$

Επίσης $$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$$, αν η μέση τιμή $\bar{x}$ **δεν** είναι **ακέραιος** αριθμός.

Αυτός ο τύπος, αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί, θα δίνεται.

Διακύμανση σε ομαδοποιημένα δεδομένα

2.36 Όταν έχουμε **ομαδοποιημένα** δεδομένα

η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i}$

$$\text{ή}\ \mathbf{s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right\}}$$

όπου $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_\kappa}$ είναι τα **κέντρα** των **κλάσεων** με συχνότητες $\mathbf{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa}$

Αυτός ο τύπος, αν πρέπει να χρησιμοποιηθεί, θα δίνεται.

Οι πιο πάνω τύποι μπορούν να εφαρμοστούν και σε μη ομαδοποιημένα δεδομένα.

2.37 Η διακύμανση

είναι μια αξιόπιστη παράμετρος διασποράς, αλλά έχει ένα **μειονέκτημα**.
Αυτή δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
Να αναφέρουμε ότι η διακύμανση
εκφράζεται με το τετράγωνο της μονάδας μέτρησης των παρατηρήσεων.

2.38 Η παράγωγος της $\mathbf{f(x) = c}$ με $\mathbf{c \in R}$, είναι η $\mathbf{f'(x) = (c)' = 0}$
Βασικά για να υπολογίζαμε τη διασπορά των παρατηρήσεων $\mathbf{t_1, t_2, \ldots, t_\nu}$
έπρεπε να αφαιρούσαμε τη μέση τιμή από κάθε παρατήρηση, για να μπορούσαμε να βρούμε τον αριθμητικό μέσο των διαφορών αυτών.

Δηλαδή θα έπρεπε να βρίσκαμε το $\mathbf{\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \ldots + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})}{\nu}}$

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν

αφού $\mathbf{\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \ldots + (t_\nu - \bar{x})}{\nu} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu} - \frac{\nu\bar{x}}{\nu} = \bar{x} - \bar{x} = 0}$

Έτσι εξαναγκαστήκαμε να θεωρήσουμε τις διαφορές στο τετράγωνο.

Τυπική απόκλιση

2.39 Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **τυπική απόκλιση** $\mathbf{s}$ των παρατηρήσεων.

Απάντηση

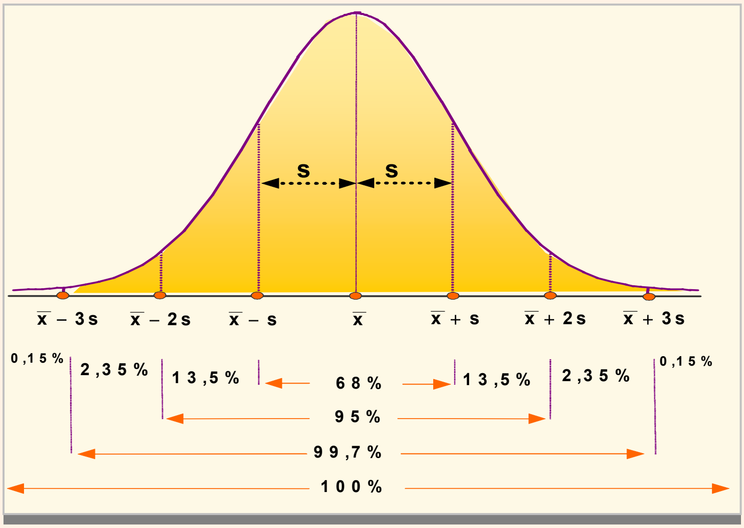
Ονομάζεται το $\mathbf{s = \sqrt{s^2}}$

Να τονίσουμε ότι
η τυπική απόκλιση εκφράζεται με την **ίδια μονάδα μέτρησης** με τις παρατηρήσεις.

Κανονική κατανομή

2.40 Έστω η καμπύλη συχνοτήτων που είναι **κανονική** ή **περίπου κανονική**

Έστω $\bar{x}$ η **μέση τιμή** και **s** η **τυπική απόκλιση** των παρατηρήσεων.



Το **68%** περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$

Το **95%** περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$

Το **99,7%** περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-3s,\ \bar{x}+3s)$

Είναι $R \cong 6 \cdot s$

Επίσης είναι $\bar{x} = \delta$

Ένα μέτρο για να συγκρίνουμε δύο δείγματα ως προς τη μεταβλητότητα τους είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας**.

Αποτελεί ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης, είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές.

Δηλαδή αυτός παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς**.

Συντελεστής μεταβολής η μεταβλητότητας

2.41 Να αναφέρετε τι λέμε **συντελεστή μεταβολής ή μεταβλητότητας CV** των παρατηρήσεων.

Απάντηση

Λέμε **συντελεστή μεταβολής** ή **συντελεστή μεταβλητότητας CV**

τον λόγο $\mathbf{CV} = \dfrac{\mathbf{s}}{|\bar{\mathbf{x}}|}$, με $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$

Σχόλια

2.42 Σε περίπτωση που η **μέση τιμή** είναι **αρνητική**, θεωρούμε σαν $\mathbf{CV} = -\dfrac{\mathbf{s}}{\bar{\mathbf{x}}}$

και στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι $\mathbf{0}$, τότε **δεν** ορίζουμε **CV**

Ο συντελεστής μεταβολής

συνήθως εκφράζεται επί τοις εκατό, δηλαδή θεωρούμε σαν $\mathbf{CV} = \dfrac{\mathbf{s}}{|\bar{\mathbf{x}}|} \cdot \mathbf{100\%}$

Είναι **ανεξάρτητος** από τις **μονάδες μέτρησης**
και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** και όχι της **απόλυτης διασποράς**.

Ομοιογενές δείγμα

2.43 Ένα δείγμα είναι **ομοιογενές**, αν ο συντελεστής μεταβολής **δεν ξεπερνά** το **10%**
Όσο **μικρότερο** συντελεστή μεταβολής έχουμε, τόσο **μεγαλύτερη**, δηλαδή τόσο **καλύτερη ομοιογένεια** έχουμε.

Συσχετισμός μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης σε γραμμικούς συνδυασμούς

2.44

- Αν $\mathbf{y_1 = x_1 + c}$, $\mathbf{y_2 = x_2 + c}$, ..., $\mathbf{y_\nu = x_\nu + c}$ …όπου $\mathbf{c}$ μια σταθερά.

τότε $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$ και $\mathbf{s_y = s_x}$

- Αν $\mathbf{y_1 = cx_1}$, $\mathbf{y_2 = cx_2}$, ..., $\mathbf{y_\nu = cx_\nu}$ …όπου $\mathbf{c}$ μια σταθερά.

τότε $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{s_y} = |\mathbf{c}|\,\mathbf{s_x}$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πειράματα

3.1 Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται, καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** πείραμα.
Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται φαινομενικά τουλάχιστον, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

Περί ενδεχομένων

3.2 Έστω ένα πείραμα τύχης.

- Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν λέγονται **δυνατά αποτελέσματα** ή **δυνατές περιπτώσεις** του πειράματος.
- Το **σύνολο** όλων των **δυνατών αποτελεσμάτων** λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω
Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τύχης τότε ο χώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}$
- Το σύνολο που έχει σαν στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα του πειράματος, λέγεται **ενδεχόμενο** ή **γεγονός**.
- Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος σε μια εκτέλεσή του είναι **στοιχείο** ενός ενδεχομένου λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**.
Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις**.
- Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό**, όταν έχει ένα **μόνο στοιχείο** και **σύνθετο** αν έχει **περισσότερα στοιχεία**.
- Ο χώρος Ω είναι ενδεχόμενο **βέβαιο ενδεχόμενο**.
Λέμε **βέβαιο ενδεχόμενο** αυτό που πραγματοποιείται πάντοτε αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω
- Το **κενό** σύνολο $\varnothing$ είναι **αδύνατο ενδεχόμενο**.
Λέμε **κενό ενδεχόμενο** αυτό που δεν πραγματοποιείται ποτέ.
- Το **πλήθος** των στοιχείων ενός ενδεχομένου **Κ** συμβολίζεται με **N(K)**

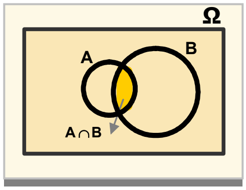
Πράξεις με ενδεχόμενα

Τομή

3.3 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **τομή** δυο ενδεχομένων.

Απάντηση

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cap B}$
που διαβάζεται “ **Α τομή Β** “ ή “ **Α και Β** “ και
πραγματοποιείται
όταν **πραγματοποιούνται συγχρόνως** τα **Α** , **Β**
…αφού έχει σαν στοιχεία τα **κοινά στοιχεία** των **Α** , **Β**

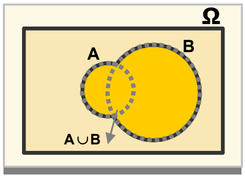


Ένωση

3.4 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **ένωση** δυο ενδεχομένων.

Απάντηση

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A \cup B}$
που διαβάζεται “ **Α ένωση Β** “ ή “ **Α ή Β** “ και
πραγματοποιείται
όταν **πραγματοποιείται** ένα **τουλάχιστον** από τα **Α** , **Β**
…αφού έχει σαν στοιχεία όλα τα στοιχεία των **Α** , **Β**

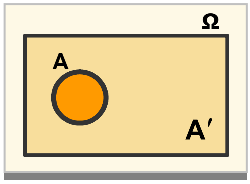


Συμπλήρωμα

3.5 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **συμπλήρωμα** ενός ενδεχομένου.

Απάντηση

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A'}$
που διαβάζεται “ **Συμπληρωματικό** του **Α** “
ή “ **όχι Α** “ **ή** “ **Αντίθετο** του **Α** “ και
πραγματοποιείται όταν **δεν πραγματοποιείται** το **Α**
…αφού έχει σαν στοιχεία τα στοιχεία του **Ω** που δεν ανήκουν στο **Α**

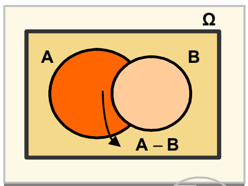


Διαφορά

3.6 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **διαφορά** δυο ενδεχομένων.

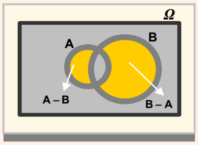
Απάντηση

Το ενδεχόμενο $\mathbf{A - B}$
διαβάζεται “ **Διαφορά του Β από το Α** “ και
πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το **Α** αλλά όχι το **Β**
…αφού έχει σαν στοιχεία τα στοιχεία του **Α** , αλλά όχι του **Β**



Είναι φανερό ότι $\mathbf{A - B = A - (A \cap B) = A \cap B'}$

Σύνθετα ενδεχόμενα

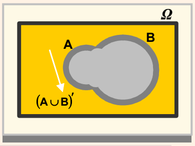


3.7 Το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται

ή μόνο το $\mathbf{A}$ **ή μόνο** το $\mathbf{B}$

δηλαδή μόνο έναν από τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, είναι το $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cup(\mathbf{B}-\mathbf{A})$

Να παρατηρήσουμε ότι: $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup(\mathbf{B}-\mathbf{A})$



Το ενδεχόμενο

να **μην πραγματοποιείται κανένα** από τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$

είναι το ενδεχόμενο $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})'$

Απλά, με βάση τα διαγράμματα Venn, είναι: $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})'=\mathbf{A}'\cap\mathbf{B}'$, $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})'=\mathbf{A}'\cup\mathbf{B}'$

Συνοπτικός πίνακας ενδεχομένων

3.8 Στον παρακάτω πίνακα τα $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το $\boldsymbol{\omega}$ ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού.

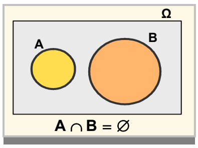
Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο **A** **πραγματοποιείται**..................	.... $\omega\in A$
Το ενδεχόμενο **A** **δεν πραγματοποιείται**...........	.... $\omega\in A'$ ή $\omega\notin A$
Ένα τουλάχιστον από τα **A** , **B** **πραγματοποιείται**.	.... $\omega\in A\cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα **A** και **B**	.... $\omega\in A\cap B$
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα **A** και **B**	.... $\omega\in(A\cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο το **A** και **όχι** το **B**	. $\omega\in A-B$ ή $\omega\in A\cap B'$
Η **πραγματοποίηση** του **A** **συνεπάγεται** και την **πραγματοποίηση** του **B**	.... $A\subseteq B$

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

3.9 Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα.

Απάντηση



Δύο ενδεχόμενα $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$

λέγονται **ασυμβίβαστα**

όταν $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\varnothing$

Αυτά λέγονται και **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

Δηλαδή τα ξένα ενδεχόμενα **δεν έχουν κοινά στοιχεία**

δηλαδή τα ξένα ενδεχόμενα **δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα**.

ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης
είναι η αβεβαιότητα για το ποιο αποτέλεσμα του πειράματος θα εμφανιστεί
σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του.
Επομένως, ένα ενδεχόμενο
δεν μπορούμε με βεβαιότητα να προβλέψουμε αν θα πραγματοποιηθεί ή όχι.
Γι' αυτό είναι χρήσιμο
να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ενδεχόμενο έναν αριθμό που θα είναι ένα μέτρο της "προσδοκίας" με την οποία αναμένουμε την πραγματοποίησή του.
Τον **αριθμό** αυτό τον ονομάζουμε **πιθανότητα** του ενδεχομένου.
Αν **Α** είναι το ενδεχόμενο, η πιθανότητα συμβολίζεται με **P(A)**

Σχετική συχνότητα

3.10 ☞ Να αναφέρετε τι ονομάζουμε **σχετική συχνότητα** ενός ενδεχομένου.

Απάντηση

Έστω ότι ο **χώρος** ενός πειράματος
είναι το **πεπερασμένο** σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\lambda\}$

Αν σε **ν εκτελέσεις** αυτού το ενδεχόμενο **Α** πραγματοποιείται **κ φορές**

τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ ονομάζεται **σχετική συχνότητα** του **Α** και συμβολίζεται με f_A

Θεώρημα

3.11 🕮 Έστω τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, ..., \{\omega_\lambda\}$ ενός πειράματος τύχης τα οποία πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως.

Έστω και οι σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}, ..., f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{\nu}$ αυτών.

Είναι
- $0 \le f_i \equiv \frac{\kappa_i}{\nu} \le 1$, με $i = 1,2,...,\lambda$
- $f_1 + f_2 + ... + f_\lambda = 1$

Απόδειξη

Είναι $0 \le f_i \equiv \frac{\kappa_i}{\nu} \le 1$, με $i = 1,2,...,\lambda$ ...αφού $0 \le \kappa_i \le \nu$

Είναι $f_1 + f_2 + ... + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_\lambda}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$

Νόμος μεγάλων αριθμών

3.12 ✍Όταν ο **αριθμός** των **δοκιμών** αυξάνει **απεριόριστα**

η **σχετική συχνότητα** καθενός από τα στοιχειώδη ενδεχόμενα
τείνει να **στρογγυλοποιηθεί** σε ένα συγκεκριμένο αριθμό.
Η πιο πάνω αντίληψη είναι **εμπειρική**
και ονομάζεται **νόμος των μεγάλων αριθμών** ή **στατιστική ομαλότητα**.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

3.13 ☞Να αναφέρετε πως ορίζεται η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου **Α**
σε ένα δειγματικό χώρο πεπερασμένου πλήθους στοιχείων με **ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα**.

Απάντηση

Έστω το πείραμα με **ν** **ισοπίθανα αποτελέσματα**
δηλαδή με αποτελέσματα που η **σχετική συχνότητα** καθενός από τα απλά ενδεχόμενα στρογγυλοποιείται στον ίδιο αριθμό.

Η **σχετική συχνότητα** ενός ενδεχομένου με **κ στοιχεία** θα **τείνει** στον αριθμό $\frac{\kappa}{\nu}$

Έτσι σε ένα πείραμα με **ισοπίθανα αποτελέσματα**
ορίζουμε σαν **σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου **Α**

τον αριθμό $P(A)=\dfrac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

Αυτή ονομάζεται και **πιθανότητα** του ενδεχομένου **Α**

*Πρόκειται για τον **κλασικό ορισμό πιθανότητας** που διατυπώθηκε από τον Laplace.*

Πιθανότητα βέβαιου και αδύνατου ενδεχόμενου

3.14 ✍Αν **Ω** είναι ένας χώρος, τότε $P(\Omega)=\dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$ και $P(\varnothing)=\dfrac{N(\varnothing)}{N(\Omega)}=0$

Για κάθε ενδεχόμενο **Α** του **Ω** ισχύει $0\le P(A)\le 1$

Για να χρησιμοποιήσουμε το κλασικό ορισμό της πιθανότητας με **πεπερασμένο πλήθος** στοιχείων, είναι απαραίτητο τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.
Υπάρχουν πειράματα τύχης
που ο χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
Έτσι γενικότερα, χρησιμοποιούμε τον **αξιωματικό ορισμό** της **πιθανότητας**.

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

3.15 ☞ Να αναφέρετε πως ορίζεται η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου **Α** σε ένα δειγματικό χώρο **πεπερασμένου πλήθους** στοιχείων.

Απάντηση

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ χώρος με **πεπερασμένο** πλήθος στοιχείων.

Ορίζουμε σαν **πιθανότητα** του ω_i τον αριθμό $P(\omega_i)$

τον οποίο θα **αντιλαμβανόμαστε** σαν τη **σχετική συχνότητα**

ώστε ✓ $0 \le P(\omega_i) \le 1$

και ✓ $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$

✓ Επίσης σαν **πιθανότητα** $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \ne \varnothing$ λέμε το **άθροισμα** $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa)$

✓ Επίσης δεχόμαστε ότι $P(\varnothing) = 0$

Είναι φανερό ότι για κάθε ενδεχόμενο **Α** ισχύει $0 \le P(A) \le 1$

Εδώ προφανώς είναι $P(\omega_i) \ne \frac{1}{\nu}$

Να τονίσουμε ότι

ο αξιωματικός ορισμός στην περίπτωση που $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, $i = 1,2,...,\nu$ δίνει τον κλασικό ορισμό πιθανότητας.

Σχόλια

3.16 ✍ Με τη φράση “ **Παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο** του **Ω** “

θα εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα ω_i είναι **ισοπίθανα** με $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$

$i = 1,2,...,\nu$

Στην περίπτωση που **δεν ισχύει** ο **κλασικός ορισμός** της πιθανότητας σαν **πιθανότητα** του ενδεχομένου **Α** , λαμβάνεται γενικά το **όριο** της **σχετικής** του **συχνότητας**.

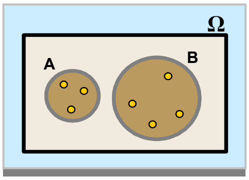
Κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω

Απλός προσθετικός νόμος

3.17 Για τα **ξένα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B, είναι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Απόδειξη



Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$

τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία

γιατί τα A και B είναι ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα.

Δηλαδή έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$

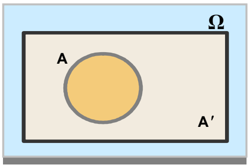
Επομένως $P(A\cup B)=\dfrac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}+\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$

Αν τα A, B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, είναι $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$

Συμπληρωματικά ενδεχόμενα

3.18 Για δύο **συμπληρωματικά** ενδεχόμενα A και A', είναι $P(A')=1-P(A)$

Απόδειξη



Επειδή $A\cap A'=\varnothing$

δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα

σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο

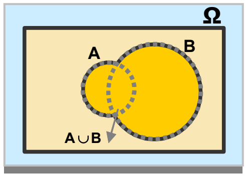
είναι $P(A\cup A')=P(A)+P(A') \Leftrightarrow P(\Omega)=P(A)+P(A') \Leftrightarrow 1=P(A)+P(A')$

Οπότε $P(A')=1-P(A)$

Προσθετικός νόμος

3.19 Για δύο ενδεχόμενα A και B, είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη



Είναι $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$

το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ *υπολογίζεται* **2** *φορές.*

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της ισότητας $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, με $N(\Omega)$

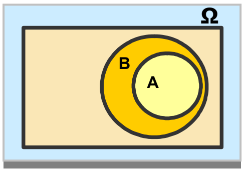
έχουμε: $\dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} + \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} - \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$

Οπότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Διάταξη

3.20 Για δύο ενδεχόμενα A και B με $A \subseteq B$, είναι $P(A) \le P(B)$

Απόδειξη



Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε $N(A) \le N(B)$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

Οπότε $P(A) \le P(B)$

Διαφορά ενδεχομένων

3.21 Για δύο ενδεχόμενα A και B, είναι $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

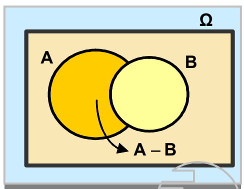
Απόδειξη

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα

και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο

έχουμε $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$



Οπότε είναι $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$